

О ЛИНЕЙНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА ИМПУЛЬСОВ СЛУЧАЙНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

Ф. М. ЗАВЬЯЛКИН, М. С. КВАСНИЦА

(Представлена научным семинаром научно-исследовательского института
электронной интроскопии)

При контроле материалов и изделий с гетерогенной структурой или с шероховатой поверхностью возникает задача оценки вклада флуктуаций параметров объекта контроля в погрешность функционирования радиометрического изотопного прибора. Данная задача является, по существу, задачей определения дисперсии $D[Y(t)]$ и среднего $\bar{Y}(t)$ на выходе линейного фильтра при поступлении на его вход пуассоновского потока электрических импульсов, интенсивность которого описывается стационарной случайной функцией времени $\lambda(t)$. Предполагается, что среднее $\bar{\lambda}(t) = \lambda_0$ и корреляционная функция $B(\tau) = \sigma_\lambda^2 R(\tau)$ процесса $\lambda(t)$ известны.

В работе [1] данная задача решена при ограничениях неотрицательности $R(\tau)$ и малости флуктуаций процесса $\lambda(t)$. Данные ограничения позволили рассмотреть коррелированный поток импульсов на входе фильтра как суперпозицию независимых потоков более простой структуры и вычислить центральные моменты любого порядка процесса $Y(t)$.

Однако представляет практический интерес вычисление $\bar{Y}(t)$ и $D[Y(t)]$ как наиболее важных характеристик процесса $Y(t)$ при определении качества функционирования радиометрического прибора без наложения вышеуказанных ограничений. Процесс

$$Y(t) = \sum_{j=1}^N h(t - t_j).$$

где $h(\tau)$ — реакция фильтра на отдельный импульс;

N — число импульсов, поступивших за интервал наблюдения $(0, T)$;

t_j — моменты появления импульсов.

Для решения данной задачи представим непрерывный процесс $\lambda(t)$ дискретным случайным процессом. На рис. 1 на примере произвольной выборочной функции процесса $\lambda(t)$ показаны данные представления и определены вводимые обозначения. При $n \rightarrow \infty$ и $\Delta \rightarrow 0$ погрешность данного представления в пределе равна нулю.

В этом случае

$$\bar{Y}(t) \simeq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} h[\Delta(n+1) - \Delta i - \tau_{ij}], \quad (1)$$

где m_i — число импульсов, поступивших на i временном интервале;

τ_{ij} — моменты появления импульсов на i интервале.

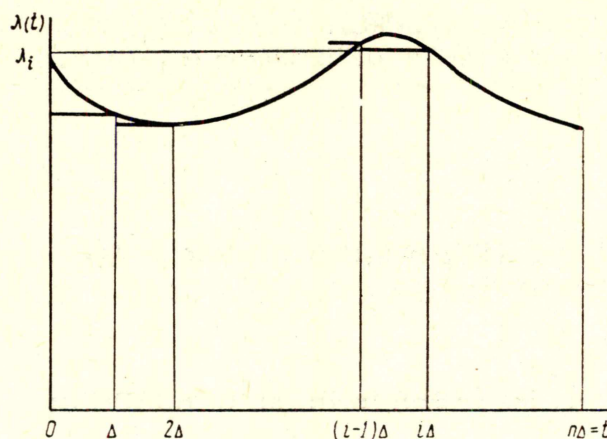


Рис. 1. Представление случайного процесса $\lambda(t)$.

$$\overline{Y(t)} \approx \sum_{i=1}^n \ll \sum_{j=1}^{m_i} h[\Delta(n+1-i) - \tau_{ij}] > \tau_{ij} > m_i \cdot$$

где символ $\langle \cdot \rangle_x$ означает усреднение по аргументу x .

Учитывая, что τ_{ij} — упорядоченные наблюдения из равномерного распределения на интервале Δ , а $\overline{m_i} = \lambda_i \Delta$,

$$\overline{Y(t)} \approx \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{\Delta(n-i)}^{\Delta(n-i+1)} h(\tau) d\tau \right\rangle_{\lambda}. \quad (2)$$

Выражение (2) при $n \rightarrow \infty$, $\Delta \rightarrow 0$ имеет в качестве своего предела следующую зависимость:

$$\overline{Y(t)} = \int_0^t \lambda(u) h(t-u) du$$

или

$$\overline{Y(t)} = \lambda_0 \int_0^t h(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Следовательно, стационарные флуктуации интенсивности потока не приводят к смещению результатов измерения характеристики изделия

$$\begin{aligned} \overline{Y^2(t)} \approx & \sum_{i=1}^n \ll \sum_{j=1}^{m_i} h^2[\Delta(n+1-i) - \tau_{ij}] > \tau_{ij} > m_i + \\ & + 2 \sum_{i=1}^n \ll \sum_{\substack{k, j=1 \\ k \neq j}}^{m_i} h[\Delta(n+1-i) - \tau_{ij}] h[\Delta(n+1-i) - \tau_{ik}] > \tau > m_i + \\ & + 2 \sum_{\substack{i, f=1 \\ i \neq j}}^n \left\{ \ll \sum_{j=1}^{m_i} h[\Delta(n+1-i) - \tau_{ij}] > \tau_{ij} > m_i \right\} \times \\ & \times \left\{ \ll \sum_{j=1}^{m_f} h[\Delta(n+1-f) - \tau_{ij}] > \tau_{ij} > m_{fj} \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначим через I_1 , I_2 , I_3 группы слагаемых выражения (4) соответственно.

$$I_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{\Delta(n-i)}^{\Delta(n-i+1)} h^2(\tau) d\tau,$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} I_1 = \overline{\int_0^t \lambda(u) h^2(t-u) du} = \lambda_0 \int_0^t h^2(\tau) d\tau. \quad (5)$$

$$I_2 = 2 \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{i=1}^{m_1} \frac{1}{\Delta^2} \left[\int_{\Delta(n-i)}^{\Delta(n-i+1)} h(\tau) d\tau \right]^2 \right\rangle_{m_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Delta^2 \{h[\Delta(n-i+1)]\}^2,$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} I_2 = \int_0^t \lambda^2(u) [h(t-u)]^2 du = \overline{Y(t)^2} + \sigma_\lambda^2 \left[\int_0^t h(\tau) d\tau \right]^2. \quad (6)$$

$$I_3 = 2 \left\langle \sum_{\substack{f, i=1 \\ i \neq f}}^n \left[\lambda_i \int_{\Delta(n-i)}^{\Delta(n-i+1)} h(\tau) d\tau \right] \left[\lambda_f \int_{\Delta(n-f)}^{\Delta(n-f+1)} h(\tau) d\tau \right] \right\rangle, \quad (7)$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} I_3 = -\sigma_\lambda^2 \left[\int_0^t h(\tau) d\tau \right]^2 + \sigma_\lambda^2 \int_0^t \int_0^t R(\tau-\theta) h(\theta) h(\tau) d\tau d\theta.$$

Окончательно получим

$$D[Y(t)] = \lambda_0 \int_0^t h^2(\tau) d\tau + \sigma_\lambda^2 \int_0^t \int_0^t R(\theta-\tau) h(\theta) h(\tau) d\tau d\theta. \quad (8)$$

Рассмотрим некоторые асимптотические выражения для вычисления $D[Y(t)]$.

1. Пусть скорость контроля сколь угодно мала. В этом случае

$$B(\tau) \approx \sigma_\lambda^2.$$

Тогда из выражений (5—7)

$$D[Y(t)] = \lambda_0 \int_0^t h^2(\tau) d\tau + \sigma_\lambda^2 \left[\int_0^t h(\tau) d\tau \right]^2. \quad (9)$$

2. Пусть скорость контроля сколь угодно большая величина. В данном случае

$$R(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases}$$

то есть λ_i и λ_f представляют собой некоррелированные случайные величины. Также из выражений (5÷7)

$$D[Y(t)] = \lambda_0 \int_0^t h^2(\tau) d\tau.$$

Выражение (8) можно обобщить на случай независимых флуктуаций амплитуд импульсов на входе фильтра, усреднив выражение (4) по амплитудам импульсов. Окончательно получим

$$D[Y(t)] = \lambda_0 (1 + \delta_0^2) \int_0^t h^2(\tau) d\tau + \sigma_\lambda^2 \int_0^t \int_0^t R(\tau-\theta) h(\theta) h(\tau) d\tau d\theta. \quad (10)$$

где δ_0^2 — относительные флуктуации амплитуд A импульсов

$$(\delta_0^2 = D[A]/\bar{A}^2);$$

$h(\tau)$ — реакция фильтра на импульс со средней амплитудой.

Полученные выражения (8÷10) могут быть использованы при разработке радиометрических приборов (дефектоскопов, плотномеров и др.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. М. Завьялкин, М. С. Квасница. Дефектоскопия, 1973, № 6, 17.